

REDEFOR

Rede São Paulo de Formação Docente Especialização de Matemática

Módulo 4 – MA007 – Atividade 9

Geometria Analítica e Números Complexos

Data limite de entrega: 21-09-2012 (23-09-2012 valendo 70% da nota)

Questão 1 – Considere que três circunferências A, B e C que se tangenciam mutuamente têm seus raios respectivamente dados por $R_A = R_B = r$ e $R_C = 2r$. Seja o sistema de coordenadas cartesianas tal que sua origem esteja no centro da circunferência maior e que os centros das circunferências B e C estejam sobre o eixo x. Além disso, suponha que a circunferência A esteja no primeiro quadrante. Veja a figura abaixo.

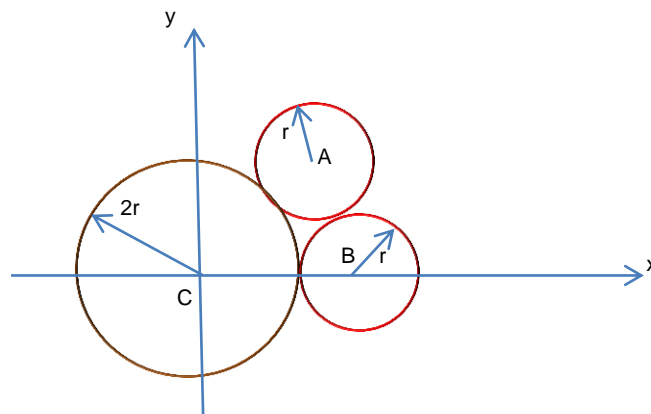


Figura 1
Circunferências A, B e C no plano cartesiano.

- i – (2,0 pontos) Qual a equação da reta que passa pelo centro das circunferências A e C?
- ii – (2,0 pontos) Utilizando o sistema de referência da figura, escreva as equações das circunferências C e A.
- iii – (2,0 pontos) Considere o plano complexo e mostre que a equação de uma circunferência com centro em $z_0 = x_0 + y_0i$ e raio r é definida pelo conjunto

$$C = \{z = x + yi \in \mathbb{C} / |z - z_0| = r\}$$

Questão 2 – Utilizando a figura abaixo, onde temos uma hipérbole e o sistema de referência cartesiano com origem em um dos focos da hipérbole, mostre que a equação do ramo direito de tal hipérbole pode ser escrita como

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos(\theta)}$$

onde $r(\theta)$ é a distância entre um ponto da hipérbole (ramo direito) e a origem do sistema de coordenadas, $p = \frac{b^2}{a}$ é o chamado “parâmetro da hipérbole”, e a excentricidade e $\theta \neq 0$.

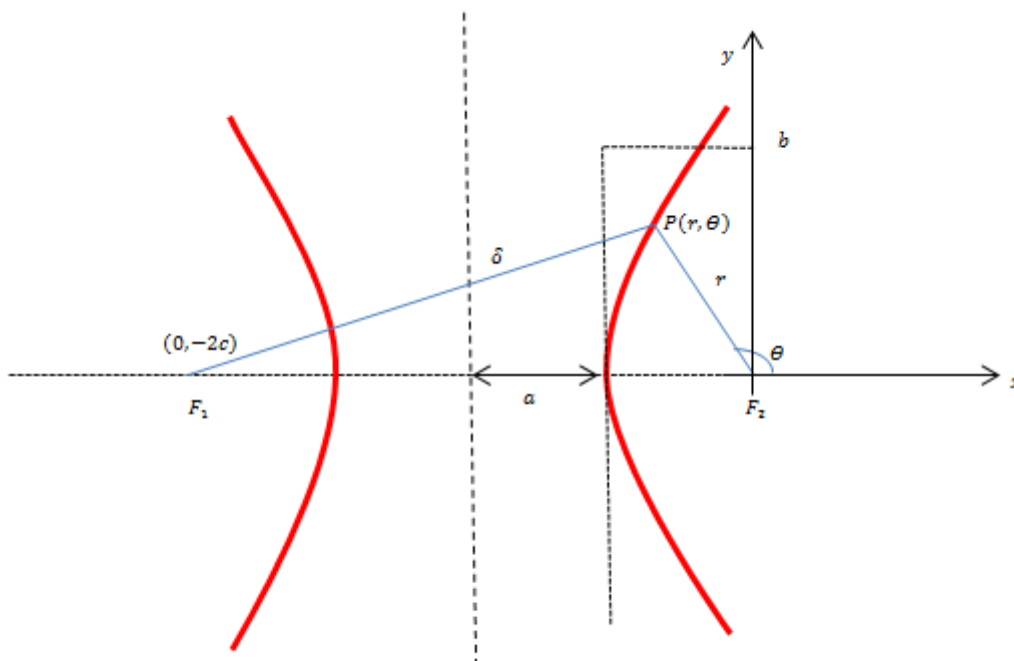


Figura 2
Hipérbole

Siga as etapas indicadas abaixo:

i – (1,0 ponto) Aplique a lei dos cossenos no triângulo F_1F_2P , e obtenha

$$\delta^2 = (2c)^2 + r^2 - 2(2c)r \cos(\pi - \theta)$$

ii – (1,0 ponto) Mostre que $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ utilizando a equação

$$\cos(\beta - \gamma) = \cos(\beta) \cos(\gamma) + \text{sen}(\beta) \text{sen}(\gamma).$$

Reescreva a equação obtida em (i) como

$$\delta^2 = 4c^2 + r^2 + 4cr \cos(\theta) \quad (1)$$



PRPG
Pós-Graduação

REDEFOR
Rede São Paulo de Formação Docente



SECRETARIA
DA EDUCAÇÃO



iii – (2,0 pontos) Utilizando as equações e definições

$$\left\{ \begin{array}{l} |F_1P - F_2P| = 2a : \text{definição de hipérbole} \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} e = \frac{c}{a} : \text{excentricidade da hipérbole} \end{array} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{b^2}{a} : \text{parâmetro da hipérbole} \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 : \text{relação notável da hipérbole} \end{array} \right. \quad (5)$$

e a expressão obtida em (ii) mostre que

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$$